



TITLE:

Yang-Baxter関係式とその応用(ソリトンと統計物理学)

AUTHOR(S):

和達, 三樹; 十河, 清; 打波, 守; 阿久津, 泰弘

CITATION:

和達, 三樹 ...[et al]. Yang-Baxter関係式とその応用(ソリトンと統計物理学). 数理解析研究所講究録 1982, 472: 109-127

ISSUE DATE:

1982-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103255>

RIGHT:

Yang-Baxter 関係式とその応用

東大教養 物理

和達 三樹
Wadati Miki

十河 清
Sogo Kiyoshi

打波 守
Uchinami Mamoru

阿久津 泰弘
Akutsu Yasuhiro

I はじめに

最近の量子完全積分系の研究により、以前は一見無関係と
思われていた2つの分野——1次元量子多体系（ δ -関数
bose 気体，量子 Sine-Gordon 系など）と2次元古典統計力学
（Ising モデル，6-vertex モデル，8-vertex モデルなど）
——が非常に密接に関連していることがわかってきた。その
結果，多くの“解けるモデル”（=完全積分可能系）が共通の
見地・手法で扱えるようになつてきている。1次元量子系
に於ては，完全積分可能性は，系の多体の S 行列が因子化さ
れる¹⁾（factorized—2体の S 行列の積でかける）ことと同値で
あると信ぜられている。一方2次元古典統計力学のモデル
にとっては，解けるための条件は，そのモデルが互いに交換

する transfer matrix²⁾ の family をもつことである。

Zamolodchikov³⁾ は、任意の因子化された S 行列が、ある vertex モデルの (互いに交換する) transfer matrix を与えることを指摘した。その際、 S 行列が因子化するための条件式 — 因子化方程式 (factorization equation) — が、transfer matrix が交換するための条件式 — Yang-Baxter 関係式^{2), 4)} — のものと他ならないことも示した。以後、多くの著者により、成分・状態数の多い (n -成分, $n \geq 3$) 解けるモデルを探す努力が成されてきている。この方向での発展もこれから更に期待されるのだが、一方で、 $n=2$ の場合でさえもまだ完全に研究しつくされているとは思われない。例えば、一般の非対称性をもつ 8-vertex モデルが解けるか否かは知られていないし、もっと一般の 16-vertex モデルに関してはさらにわずかなことしか知られていない。そこで我々は自然に "解ける 2 成分モデルはいったいいくつ存在するのだろうか" という問いに導かれる。本稿の主な目的は、この問いに部分的にはあるが完全な解答を与えることである。以下の II ~ IV ではこの目的に相当する最近の我々の仕事⁵⁾ の紹介を行なう。V ではこの目的からは少しはずれるが、統計力学での応用例について述べる。VI では、将来の見通しに関して少しふれることにする。

II 2成分モデルに対する Yang-Baxter 関係式

我々が扱うのは, Baxter²⁾, Zamolodchikov³⁾ を拡張したモデルで, これを "一般化した 8-vertex モデル" と呼ぶことにする (以下, 主として vertex モデルの言葉を用いるが, 同時に S 行列としても考えていることに注意). これは基本的な vertex の状態として以下の 8 つのみを許すものである.

$$\begin{array}{cccccccc}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \\
 S_1 & S_2 & S_3 & \tilde{S}_3 & S_4 & \tilde{S}_4 & S_5 & \tilde{S}_5
 \end{array}$$

ここで各 vertex の重み (又は 対応する S 行列要素) を $S_1 \sim \tilde{S}_5$ とした。この系の local transition matrix⁶⁾ $L_n(\lambda)$ (λ : spectral parameter — 解ける family 中の "位置" を指定するもの) は

$$L_n(\lambda) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 w_{ij}(\lambda) \sigma_i^i \otimes \sigma_n^j \quad (\text{具体的には } L_n(\lambda)_{i,j,k,l} = \frac{i}{j} \frac{l}{k})$$

の形に表わされる (σ^i は Pauli 行列, $\sigma^4 = I$)。 M (たて) $\times N$ (よこ) の大きさの 周期的格子上で考えると, transfer matrix $T(\lambda)$ は,

$$T(\lambda) = \text{Tr} (L_N(\lambda) L_{N-1}(\lambda) \cdots L_2(\lambda) L_1(\lambda)) \quad (1)$$

で定義され, これを用いて分配関数 Ω が $\Omega = \text{Tr} T^M$ とかける。ここで Yang-Baxter 関係式^{2), 4), 6)} と呼ばれる条件式

$$R(\lambda, \mu) (L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)) = (L_n(\mu) \otimes L_n(\lambda)) R(\lambda, \mu) \quad (2)$$

を満たす 非特異行列 R が存在すると

$$[T(\lambda), T(\mu)] = 0 \quad \text{for } \forall \lambda, \mu \quad (3)$$

、つまり互いに交換する transfer matrix の family が得られ、系の完全積分性が保証される。よって、(2)式が、2次元古典統計力学の解けるモデルにと、最も基本的で重要な関係式である。一方、1次元量子系においては、系の完全積分性は S 行列の因子化と等価であると考えられており、そのための条件式（くり返し用いた添字は和を意味する）

$$S_{jp}^{ik}(\theta_{12}) S_{kr}^{lm}(\theta_{13}) S_{rl}^{pm}(\theta_{23}) = S_{rp}^{ik}(\theta_{23}) S_{pl}^{kr}(\theta_{13}) S_{jm}^{lm}(\theta_{12}) \quad (4)$$

は因子化方程式¹⁾ (factorization equation) 又は三角方程式 (triangle equation) と呼ばれている。ここで $S_{jp}^{ik}(\theta_{12})$ は、散乱過程 $(ij) \rightarrow (kl)$ に対する 2 体の S 行列要素で、 $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$ (= rapidity の差) である。Zamolodchikov³⁾ は一般的に

$$L_{\alpha\beta, \gamma\alpha'}(\lambda) = S_{\beta\gamma}^{\alpha\alpha'}(\lambda), \quad R_{\alpha\beta, \gamma\alpha'}(\lambda, \mu) = S_{\beta\gamma}^{\alpha\alpha'}(\lambda - \mu) \quad (5)$$

とみると、(4)式は (2)式と等価であることを指摘した。

このように L と R とが同一の関数形で表わされるとすると、(2)の解を求める (L_n を求める) ことが著しく簡単化される。

我々もはじめにこの"同一化"を行なう。ただし、もちろんすでに解けることが知られているもので、因子化方程式の解としては再現できないモデルも存在する。これに関しては後で (IV) 述べることにする。

一般化された 8-vertex モデルの各 vertex の weight, 若くは対応する S 行列要素を、Zamolodchikov の symbolic algebra^{1), 3)}

の交換関係として表わしておくと

$$\begin{aligned}
 A_1(\theta_1) A_1(\theta_2) &= S_1(\theta_{12}) A_1(\theta_2) A_1(\theta_1) + S_a(\theta_{12}) A_2(\theta_2) A_2(\theta_1) \\
 A_2(\theta_1) A_2(\theta_2) &= S_2(\theta_{12}) A_2(\theta_2) A_2(\theta_1) + \tilde{S}_a(\theta_{12}) A_1(\theta_2) A_1(\theta_1) \\
 A_1(\theta_1) A_2(\theta_2) &= S_t(\theta_{12}) A_2(\theta_2) A_1(\theta_1) + S_r(\theta_{12}) A_1(\theta_2) A_2(\theta_1) \\
 A_2(\theta_1) A_1(\theta_2) &= \tilde{S}_t(\theta_{12}) A_1(\theta_2) A_2(\theta_1) + \tilde{S}_r(\theta_{12}) A_2(\theta_2) A_1(\theta_1) \quad (6)
 \end{aligned}$$

因子化方程式 (4) は、具体的に以下 の 28 個 の関数方程式となる。

$$\begin{aligned}
 S_r \tilde{S}_r S_r &= \tilde{S}_r S_r \tilde{S}_r \\
 S_a \tilde{S}_r \tilde{S}_a &= \tilde{S}_a S_r S_a, \quad S_a \tilde{S}_a \tilde{S}_r = \tilde{S}_a S_a S_r, \quad \tilde{S}_r S_a \tilde{S}_a = S_r \tilde{S}_a S_a \\
 S_1 S_1 S_a + S_a \tilde{S}_r S_2 &= \tilde{S}_r S_a S_1 + S_t S_t S_a \\
 S_1 S_a S_r + S_a \tilde{S}_t \tilde{S}_t &= S_a S_1 S_1 + S_2 S_r S_a \\
 S_2 S_2 \tilde{S}_a + \tilde{S}_a S_r S_1 &= S_r \tilde{S}_a S_2 + \tilde{S}_t \tilde{S}_t \tilde{S}_a \\
 S_2 \tilde{S}_a \tilde{S}_r + \tilde{S}_a S_t S_t &= \tilde{S}_a S_2 S_2 + S_1 \tilde{S}_r \tilde{S}_a \\
 S_r \tilde{S}_a S_1 + S_t S_t \tilde{S}_a &= \tilde{S}_a S_r S_2 + S_1 S_1 \tilde{S}_a \\
 S_2 \tilde{S}_r \tilde{S}_a + \tilde{S}_a S_1 S_1 &= \tilde{S}_a \tilde{S}_t \tilde{S}_t + S_1 \tilde{S}_a \tilde{S}_r \\
 \tilde{S}_r S_a S_2 + \tilde{S}_t \tilde{S}_t S_a &= S_a \tilde{S}_r S_1 + S_2 S_2 S_a \\
 S_1 S_r S_a + S_a S_2 S_2 &= S_a S_t S_t + S_2 S_a S_r \\
 S_1 S_a S_t + S_a \tilde{S}_t \tilde{S}_r &= \tilde{S}_t S_a S_1 + S_r S_t S_a \\
 S_2 \tilde{S}_a \tilde{S}_t + \tilde{S}_a S_t S_r &= S_t \tilde{S}_a S_2 + \tilde{S}_r \tilde{S}_t \tilde{S}_a \\
 \tilde{S}_t \tilde{S}_a S_1 + \tilde{S}_r S_t \tilde{S}_a &= \tilde{S}_a \tilde{S}_t S_r + S_1 \tilde{S}_a S_t \\
 S_t S_a S_2 + S_r \tilde{S}_t S_a &= S_a S_t \tilde{S}_r + S_2 S_a \tilde{S}_t \\
 S_1 S_t S_r + S_a \tilde{S}_a \tilde{S}_t &= \tilde{S}_r S_r S_t + S_t S_1 S_r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 \tilde{S}_t \tilde{S}_r + \tilde{S}_a S_a S_t &= S_r \tilde{S}_r \tilde{S}_t + \tilde{S}_t S_2 \tilde{S}_r \\
S_t S_a \tilde{S}_a + S_r \tilde{S}_t S_1 &= \tilde{S}_t S_r \tilde{S}_r + S_r S_1 \tilde{S}_t \\
\tilde{S}_t \tilde{S}_a S_a + \tilde{S}_r S_t S_2 &= S_t \tilde{S}_r S_r + \tilde{S}_r S_2 S_t \\
S_t S_1 \tilde{S}_r + S_r \tilde{S}_r S_t &= S_1 S_t \tilde{S}_r + \tilde{S}_a S_a \tilde{S}_t \\
\tilde{S}_t S_2 S_r + \tilde{S}_r S_r \tilde{S}_t &= S_2 \tilde{S}_t S_r + S_a \tilde{S}_a S_t \\
\tilde{S}_r S_1 \tilde{S}_t + \tilde{S}_t \tilde{S}_r S_r &= \tilde{S}_r \tilde{S}_t S_1 + S_t \tilde{S}_a S_a \\
S_r S_2 S_t + S_t S_r \tilde{S}_r &= S_r S_t S_2 + \tilde{S}_t S_a \tilde{S}_a \\
S_1 S_r S_1 + S_a S_2 \tilde{S}_a &= \tilde{S}_t S_r S_t + S_r S_1 S_r \\
S_2 \tilde{S}_r S_2 + \tilde{S}_a S_1 S_a &= S_t \tilde{S}_r \tilde{S}_t + \tilde{S}_r S_2 \tilde{S}_r \\
\tilde{S}_r S_1 \tilde{S}_r + \tilde{S}_t \tilde{S}_r S_t &= S_1 \tilde{S}_r S_1 + \tilde{S}_a S_2 S_a \\
S_r S_2 S_r + S_t S_r \tilde{S}_t &= S_2 S_r S_2 + S_a S_1 \tilde{S}_a
\end{aligned} \tag{7}$$

ただし各式の各項の各因数の引数は、左から $\theta, \theta+\theta', \theta'$ である。Zamolodchikov algebra の consistency 条件としての unitarity 条件式は

$$\begin{aligned}
S_1(\theta) S_1(-\theta) + S_a(\theta) \tilde{S}_a(-\theta) &= S_2(\theta) S_2(-\theta) + \tilde{S}_a(\theta) S_a(-\theta) = 1 \\
S_1(\theta) S_a(-\theta) + \tilde{S}_a(\theta) S_2(-\theta) &= S_2(\theta) \tilde{S}_a(-\theta) + \tilde{S}_a(\theta) S_1(-\theta) = 0 \\
S_r(\theta) S_r(-\theta) + S_t(\theta) \tilde{S}_t(-\theta) &= \tilde{S}_r(\theta) \tilde{S}_r(-\theta) + \tilde{S}_t(\theta) S_t(-\theta) = 1 \\
S_r(\theta) S_t(-\theta) + S_t(\theta) \tilde{S}_r(-\theta) &= \tilde{S}_r(\theta) \tilde{S}_t(-\theta) + \tilde{S}_t(\theta) S_r(-\theta) = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

と存在が、vertex モデル (2次元統計力学) としてはこの条件は必ずしも必要ではない。 (7) 式では、式の数が未知関数の数より圧倒的に多く存在しているが、実際に解いてみると、その

全てを満たす解は確かに存在している。

III 因子化方程式の解とその分類

(7)式は、各 S 行列要素間の比を与えるのみであるから、次のような "規格化された" 関数を求めることにする。

$$\begin{aligned} h_1(\theta) &= S_1(\theta) / S_r(\theta), \quad h_2(\theta) = S_2(\theta) / S_r(\theta) \\ h_t(\theta) &= S_t(\theta) / S_r(\theta), \quad \tilde{h}_t(\theta) = \tilde{S}_t(\theta) / S_r(\theta) \\ h_a(\theta) &= S_a(\theta) / S_r(\theta), \quad \tilde{h}_a(\theta) = \tilde{S}_a(\theta) / S_r(\theta) \end{aligned} \quad (9)$$

解を得る手続は standard ではあるが煩雑である。詳細は文献5を参照されたい。

自明でない解は主に3つの場合 (8V, 7V, 6V) に分類される。8V (eight-vertex) は $S_1 \sim \tilde{S}_a$ のすべてが weight がゼロでない場合, 7V (seven-vertex) は S_a, \tilde{S}_a のいずれかがゼロの場合, 6V (six-vertex) は $S_a = \tilde{S}_a = 0$ の場合である。各々はさらに subcase に分類され, 8V, 7V は3つ, 6V は2つの subcase から成る (表1~表3)。表中のパラメータ $\alpha_1 \sim \tilde{\alpha}_a$ はそれぞれ h_1 etc の $\theta=0$ における微分係数 ($dh_i/d\theta|_{\theta=0}$ など) である。8V(I) は Baxter-Zamolodchikov のわずかな拡張である。8V(II), 8V(III), 7V(II), 7V(III), 6V(II) は "free fermion モデル"¹⁷⁾ と呼ばれるものに属し, 次の関係式を満たしている

$$S_1 S_2 + S_t \tilde{S}_t = S_r \tilde{S}_r + S_a \tilde{S}_a \quad (10)$$

表 1

	$\delta V(I)$	$\delta V(II)$	$\delta V(III)$
$h_1(\theta)$	$\frac{\operatorname{sn}(\lambda\theta + 2\eta)}{\operatorname{sn}(2\eta)}$	$\frac{\operatorname{cn}(\lambda\theta)}{\operatorname{dn}(\lambda\theta)} + \frac{\gamma \operatorname{sn}(\lambda\theta)}{\sqrt{1-\gamma^2}}$	$\frac{\cosh(\alpha_t \theta)}{\cosh(\sqrt{c} \alpha_a \theta)}$
$h_2(\theta)$	$h_1(\theta)$	$\frac{\operatorname{cn}(\lambda\theta)}{\operatorname{dn}(\lambda\theta)} - \frac{\gamma \operatorname{sn}(\lambda\theta)}{\sqrt{1-\gamma^2}}$	$h_1(\theta)$
$h_t(\theta)$	$\epsilon \frac{\operatorname{sn}(\lambda\theta)}{\operatorname{sn}(2\eta)}$	$\frac{\epsilon \operatorname{sn}(\lambda\theta)}{\sqrt{1-\gamma^2}}$	$\frac{\sinh(\alpha_t \theta)}{\cosh(\sqrt{c} \alpha_a \theta)}$
$\tilde{h}_t(\theta)$	$h_t(\theta)$	$h_t(\theta)$	$-h_t(\theta)$
$h_a(\theta)$	$\frac{\delta k}{\sqrt{c}} \operatorname{sn}(\lambda\theta) \operatorname{sn}(\lambda\theta + 2\eta)$	$\frac{\delta k}{\sqrt{c}} \operatorname{sn}(\lambda\theta) \cdot \frac{\operatorname{cn}(\lambda\theta)}{\operatorname{dn}(\lambda\theta)}$	$\frac{1}{\sqrt{c}} \tanh(\sqrt{c} \alpha_a \theta)$
$\tilde{h}_a(\theta)$	$c h_a(\theta)$	$c h_a(\theta)$	$c h_a(\theta)$
Unitarity condition $S_r(\theta) S_r(-\theta)$	$\frac{\operatorname{sn}^2(2\eta)}{\operatorname{sn}^2(2\eta) - \operatorname{sn}^2(\lambda\theta)}$	$\frac{1-\gamma^2}{1-\gamma^2 - \operatorname{sn}^2(\lambda\theta)}$	$\frac{\cosh^2(\sqrt{c} \alpha_a \theta)}{\cosh^2(\sqrt{c} \alpha_a \theta) + \sinh^2(\alpha_t \theta)}$
Parameters	$\alpha_1 = \frac{\lambda \operatorname{cn}(2\eta) \operatorname{dn}(2\eta)}{\operatorname{sn}(2\eta)}$ $\alpha_t = \frac{\epsilon \lambda}{\operatorname{sn}(2\eta)}$ $\sqrt{c} \alpha_a = \delta k \operatorname{sn}(2\eta)$	$\alpha_t^2 = \frac{\lambda^2}{1-\gamma^2}$ $c \alpha_a^2 = k^2 \lambda^2$	

表 2 (7V(III) に対して $\tilde{S}_r(\theta) = e^{\mu\theta} S_r(\theta)$)

	7V(I)	7V(II)	7V(III)
$h_1(\theta)$	$\frac{\sin(\lambda\theta+2\eta)}{\sin(2\eta)}$	$\frac{\sin(\lambda\theta+2\eta)}{\sin(2\eta)}$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta} \cosh(\lambda\theta)$
$h_2(\theta)$	$h_1(\theta)$	$\frac{\sin(-\lambda\theta+2\eta)}{\sin(2\eta)}$	$h_1(\theta)$
$h_t(\theta)$	$\frac{\epsilon \sin(\lambda\theta)}{\sin(2\eta)}$	$\frac{\epsilon \sin(\lambda\theta)}{\sin(2\eta)}$	$\epsilon e^{\frac{\mu}{2}\theta} \sinh(\lambda\theta)$
$\tilde{h}_t(\theta)$	$h_t(\theta)$	$h_t(\theta)$	$-h_t(\theta)$
$h_a(\theta)$	$\frac{\alpha_a \sin(\lambda\theta) \sin(\lambda\theta+2\eta)}{\sin(2\eta)}$	$\delta \sin(\lambda\theta) \cos(\lambda\theta)$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta} \frac{2\alpha_a \sinh(\frac{\mu}{2}\theta)}{\mu}$
Unitarity condition $S_r(\theta)S_r(-\theta)$	$\frac{1}{\sin^2(2\eta) - \sin^2(\lambda\theta)}$	$\frac{1}{\sin^2(2\eta) - \sin^2(\lambda\theta)}$	$\frac{1}{\cosh^2(\lambda\theta)}$
Parameters	$\alpha_1 = \lambda \cot(2\eta)$ $\alpha_t = \frac{\epsilon \lambda}{\sin(2\eta)}$	$\alpha_1 = \lambda \cot(2\eta)$ $\alpha_t = \frac{\epsilon \lambda}{\sin(2\eta)}$	$\alpha_1 = \mu/2$ $\alpha_t = \epsilon \lambda$

表 3 ($\hat{S}_r(\theta) = e^{i\mu\theta} S_r(\theta)$)

	GV(I)	GV(II)
$h_1(\theta)$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta} \frac{\sin(\lambda\theta + 2\eta)}{\sin(2\eta)}$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta} \frac{\sin(\lambda\theta + 2\eta)}{\sin(2\eta)}$
$h_2(\theta)$	$h_1(\theta)$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta} \frac{\sin(-\lambda\theta + 2\eta)}{\sin(2\eta)}$
$h_t(\theta)$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta} \frac{\alpha_t \sin(\lambda\theta)}{\lambda}$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta} \frac{\alpha_t \sin(\lambda\theta)}{\lambda}$
$\tilde{h}_t(\theta)$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta} \frac{\tilde{\alpha}_t \sin(\lambda\theta)}{\lambda}$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta} \frac{\tilde{\alpha}_t \sin(\lambda\theta)}{\lambda}$
Unitarity condition $S_r(\theta)S_r(-\theta)$	$\frac{\sin^2(2\eta)}{\sin^2(2\eta) - \sin^2(\lambda\theta)}$	$\frac{\sin^2(2\eta)}{\sin^2(2\eta) - \sin^2(\lambda\theta)}$
Parameters	$\alpha_t \tilde{\alpha}_t - (\alpha_t - \frac{\mu}{2})^2 = \lambda^2$ $\alpha_t - \frac{\mu}{2} = \lambda \cot(2\eta)$	$\alpha_t \tilde{\alpha}_t - (\alpha_t - \frac{\mu}{2})^2 = \lambda^2$ $\alpha_t - \frac{\mu}{2} = \lambda \cot(2\eta)$

また, $7V(III)$, $6V(I)$, $6V(II)$ を除いては $\tilde{S}_r(\theta) = S_r(\theta)$ である。注意として, $7V$ の場合は vertex モデルとしては, たて方向に自由境界条件をとったならば意味がある, ということを述べておく。

vertex モデルからは次の公式⁸⁾により 1次元量子スピン系の Hamiltonian が得られる。

$$H = d \log T(\theta) / d\theta \big|_{\theta=0} \quad (11)$$

ただし $T(\theta)$ は vertex モデルの transfer matrix である。表 4 に, 各々の解に相当する スピン系の Hamiltonian をまとめておく。ただし $H = \sum_m H_{m,m+1}$ とおき, さらに

$$\begin{aligned} H_{m,m+1} = & J_1 \sigma_m^1 \sigma_{m+1}^1 + J_2 \sigma_m^2 \sigma_{m+1}^2 + J_3 \sigma_m^3 \sigma_{m+1}^3 \\ & + \frac{1}{2} \hbar (\sigma_m^3 + \sigma_{m+1}^3) + C (\text{定数}) \\ & + A (\sigma_m^+ \sigma_{m+1}^- - \sigma_m^- \sigma_{m+1}^+) + B (\sigma_m^+ \sigma_{m+1}^+ - \sigma_m^- \sigma_{m+1}^-) \end{aligned} \quad (12)$$

とおいた。ここで $\sigma^1 \sim \sigma^3$ は pauli 行列, また $\sigma^\pm = \sigma^1 \pm i\sigma^2$ とした。

IV 6-vertex モデル

III で得られた解の中には, Yang, Sutherland⁹⁾ によって解かれた, "一般化された 6-vertex モデル" ($S_1 \sim \tilde{S}_r$ のすべての要素が異なるもの) が含まれていない。これは (5) 式の同一化に起因する。事実, (2) 式にたちもどって R を消去すると, 結局次の解も得る (簡単のため $\tilde{S}_r = S_r$ とした)。

	J_1	J_2	J_3	h	A	B
$8V(I)$	$1 + \frac{\epsilon\delta\kappa}{2\lambda}(\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c})\alpha n(2\eta)^2$	$1 - \frac{\epsilon\delta\kappa}{2\lambda}(\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c})\alpha n(2\eta)^2$	$\epsilon \cos(2\eta) \sin(2\eta)$	0	0	$\frac{\epsilon\delta\kappa}{4\lambda}(\frac{1}{\sqrt{c}} - \sqrt{c})\alpha n(2\eta)^2$
$8V(II)$	$1 + \frac{\epsilon\delta\kappa}{2}(\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c})\sqrt{1-\gamma^2}$	$1 - \frac{\epsilon\delta\kappa}{2}(\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c})\sqrt{1-\gamma^2}$	0	$2\epsilon\gamma$	0	$\frac{\epsilon\delta\kappa}{4}(\frac{1}{\sqrt{c}} - \sqrt{c})\sqrt{1-\gamma^2}$
$8V(III)$	$(1+c)\alpha_a$	$-(1+c)\alpha_a$	0	0	α_t	$\frac{1}{2}(1-c)\alpha_a$
$7V(I)$	$1 + \frac{\epsilon\alpha_a}{2\lambda}\alpha n(2\eta)$	$1 - \frac{\epsilon\alpha_a}{2\lambda}\alpha n(2\eta)$	$\epsilon \cos(2\eta)$	0	0	$\frac{\epsilon\alpha_a}{4\lambda}\alpha n(2\eta)$
$7V(II)$	$1 + \frac{\epsilon\delta}{2}\alpha n(2\eta)$	$1 - \frac{\epsilon\delta}{2}\alpha n(2\eta)$	0	$2\epsilon \cos(2\eta)$	0	$\frac{\epsilon\delta}{4}\alpha n(2\eta)$
$7V(III)$	α_a	$-\alpha_a$	0	0	α_t	$\frac{1}{2}\alpha_a$
$6V(I)$	$\frac{1}{2}(\alpha_t + \tilde{\alpha}_t)$	$\frac{1}{2}(\alpha_t + \tilde{\alpha}_t)$	$\lambda \cos(2\eta)$	0	$\frac{1}{4}(\alpha_t - \tilde{\alpha}_t)$	0
$6V(II)$	$\frac{1}{2}(\alpha_t + \tilde{\alpha}_t)$	$\frac{1}{2}(\alpha_t + \tilde{\alpha}_t)$	0	$2\lambda \cos(2\eta)$	$\frac{1}{4}(\alpha_t - \tilde{\alpha}_t)$	0

表 4

$$S_1(\lambda) = \rho_1 \sin(\lambda + 2\eta), \quad S_2(\lambda) = \rho_2 \sin(\lambda + 2\eta)$$

$$S_t(\lambda) = \rho_3 \sin \lambda, \quad \tilde{S}_t(\lambda) = \rho_4 \sin \lambda$$

$$S_r = \tilde{S}_r = \rho \sin 2\eta \quad (13)$$

、ただし $\rho_1 \rho_2 = \rho_3 \rho_4 = \rho^2$ が要求される。このときの R は、

$$R(\lambda - \lambda') = \begin{pmatrix} \rho^2 \sin(\lambda - \lambda' + 2\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 \sin 2\eta & \rho_1 \rho_4 \sin(\lambda - \lambda') & 0 \\ 0 & \rho_2 \rho_3 \sin(\lambda - \lambda') & \rho^2 \sin 2\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^2 \sin(\lambda - \lambda' + 2\eta) \end{pmatrix} \quad (14)$$

となる。ここでこの解が、因子化方程式の解 $S_{\delta\delta'}^{\alpha\alpha'}$ から、成分の index に依存する定数倍の変換

$$L_{\delta\alpha, \delta'\alpha'}(\lambda) = a_{\delta\alpha, \delta'\alpha'} S_{\delta\delta'}^{\alpha\alpha'}(\lambda)$$

$$R_{\delta\alpha, \delta'\alpha'}(\lambda) = b_{\delta\alpha, \delta'\alpha'} S_{\delta\delta'}^{\alpha\alpha'}(\lambda) \quad (15)$$

により得られていることに注意したい。そしてこの変換は Yang-Baxter 関係式を不変にする変換となっている。このような“対称性を破る変換”が3成分以上のモデルにも、ある場合には存在することはわかっていく。

この“一般化された 6-vertex モデル”の transfer matrix と交換する spin Hamiltonian は次のような形のものである¹⁰⁾。

$$H = \sum_{n=1}^N \left\{ (A/2) \sigma_n^3 \sigma_{n-1}^3 + \gamma (\sigma_n^+ \sigma_{n-1}^- + \sigma_n^- \sigma_{n-1}^+) \right. \\ \left. + c (\sigma_n^+ \sigma_{n-1}^- - \sigma_n^- \sigma_{n-1}^+) + (D/2) \sigma_n^3 \right\} \quad (16)$$

以上 (II ~ IV) まですで得られた結果を要約すると、

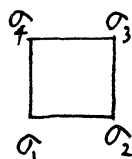
- ① 一般化された 8-vertex モデル に対する 因子化方程式の解は完全に分類された。
- ② 一般化された 6-vertex モデル は 因子化方程式の解には含まれないが、もともとの Yang-Baxter 関係式の解になっている。よって Yang-Baxter 関係式のほうが基本的・一般的であることが示された。

V 物理的応用例

ここでは以上で述べたものの以外の、統計力学上の応用例について述べる。

1) duality と因子化された S 行列¹¹⁾

Baxter の symmetric 8-vertex モデルは、4体相互作用をもった 2次元 Ising モデルと等価であることが知られている¹²⁾ (Kadanoff-Wegner 変換)。さらにこの Ising モデルにも duality 変換が存在する。この変換が S 行列の立場からみるとどうなるかを考える。問題にする 4体 Ising 系は、2次元正方格子の各 plaquette 各に次のような weight が与えられているものである。



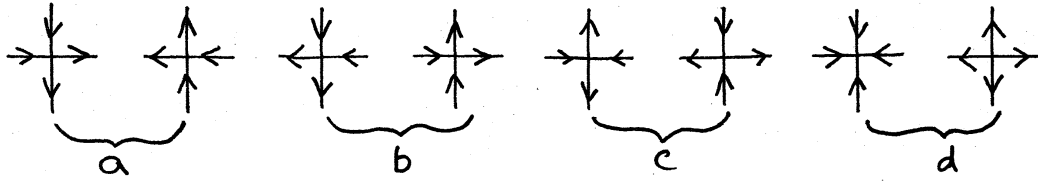
$$\sigma_i = \pm 1 \quad \text{weight} = \text{定数} \times \exp(K\sigma_1\sigma_3 + L\sigma_2\sigma_4 + M\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$$

対応する 8-vertex モデルの weight γ は

$$K = (1/4) \ln(ac/bd), \quad L = (1/4) \ln(ad/bc)$$

$$M = (1/4) \ln(ab/cd) \quad (17)$$

の関係がある。ここで次のような定義を用いた。



4体 Ising 系の duality 変換は次式で与えられる。

$$\Delta^* = 1/\Delta, \quad K^* = f(K, L, M), \quad L^* = f(L, K, M), \quad M^* = f(M, K, L) \quad (18)$$

ただし, $\Delta(K, L, M)$, $f(K, L, M)$ は次のようなものである。

$$\Delta(K, L, M) = \text{sh } 2K \text{ sh } 2L + \text{th } 2M \text{ ch } 2K \text{ ch } 2L$$

$$f(K, L, M) = -\frac{1}{4} \ln \left\{ \frac{e^{-4K}(e^{-2L} - e^{-2M})^2 - (1 - e^{-2L-2M})^2}{e^{-4K}(e^{-2L} + e^{-2M}) - (1 + e^{-2L-2M})^2} \right\} \quad (19)$$

一方, vertex モデルに翻訳すると

$$2a^* = a + b + c + d, \quad 2b^* = a + b - c - d$$

$$2c^* = a - b + c - d, \quad 2d^* = a - b - c + d \quad (20)$$

Zamolodchikov algebra の立場でみると, 以下の $(a^* \sim d^*)$ は

$$B_1 = (1/\sqrt{2})(A_1 + A_2), \quad B_2 = (1/\sqrt{2})(A_1 - A_2) \quad (21)$$

に対する S 行列要素となっている。このように, duality

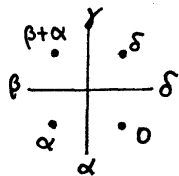
変換は, S 行列の立場でみると "粒子の変換" となっている。

このような見方で duality をとらえることにより, そのより深い物理的意味, 別の側面を知り, 同時に duality 変換自体の導出にも役立つ可能性が大きいものと思われる。

2) roughening モデルへの応用¹³⁾

結晶表面などの roughening¹⁴⁾の問題は、結晶成長の機構との関連から、かなり以前から存在する問題であるが、最近いわゆる Kosterlitz-Thouless 型の相転移との関係が指摘されてから新たな関心を引き、多くの仕事が行われてきている。厳密に解けるモデルとしては van Beijeren¹⁵⁾による、6-vertex モデル (状態数 $q=2$) — 特に F-モデル — を用いたものが存在する。ここでは $q \geq 3$ のある種の vertex モデルが roughening のモデルになることを示す。これらの vertex モデルも仮に "電荷保存モデル" と呼ぶことにする。これは、vertex $\begin{array}{c|c} \gamma & \\ \hline \beta & \delta \\ \hline \alpha & \end{array}$ ($\alpha \sim \delta$ は "電荷") の weight が $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ の γ にとり限られてゼロでない、という条件を満たすものとして定義される。

vertex と界面の profile との対応は次図のようにつける。



• : 結晶界面の格子点 ($0, \alpha, \beta + \alpha$, などはその点) (における界面の相対的高さ)

これにより、界面上の plaquette での高さの配置が、vertex の状態と 1対1 に対応する。そしてそのときの plaquette の Boltzmann weight を vertex の weight とすればよい。 $q=3$ の場合に相当するのが Zamolodchikov-Fateev¹⁶⁾ の 19-vertex モデルである。彼らのモデルの free energy も実際に計算してみると、実は 2種類の 6-vertex モデルの和で表わされ

ることもわかった ($f_{z,F} = f_{6v}^{(1)} + f_{6v}^{(2)}$)。特に、 z 方向と横方向を等しくする極限 (等角極限) では F -モデルの相転移を生ずることがわかってゐる。このような相転移の性質が、 β の変化 (増大) とともにどう変化するかは大変興味をもたれるところである。

VI おわりに

すでに II ~ IV でみたように、残念ながら、本来の意味での "一般化された 8-vertex モデル" — すべての weight が異なる 8-vertex モデル — は我々の得た解の中には含まれてはいなかった。一方、 $Wu^{17)}$ により、このモデルは "対称的な" 16-vertex モデルに等価であることが証明されている。この意味でも、16-vertex モデルの研究は、今後の問題として重要であろう。また、新しい "解けるモデル" がぞくぞく出てくる一方で、現状では、その "使いみち" がいさゝかえしく思われるのは気のせいであろうか。この方面の発展も今後の問題であろう。

参考文献

- 1) A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, Ann. Phys. 120 (1979), 253
- K. Sogo, M. Uchinami, A. Nakamura and M. Wadati,

- Prog. Theor. Phys. 66 (1981), 1284
- 2) R. J. Baxter, Ann. Phys. 70 (1972), 193
 - 3) A. B. Zamolodchikov, Comm. Math. Phys. 69 (1979), 165
 - 4) C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 1312
 - 5) K. Sogo, M. Uchinami, Y. Akutsu and M. Wadati,
Prog. Theor. Phys., to appear.
 - 6) L. A. Takhtadyan and L. D. Faddeev, Russian Math.
Surveys 34 (1979), 11
 - 7) E. H. Lieb, T. D. Schultz and D. C. Mattis, Ann. Phys. 16
(1961), 941
 - C. Fan and F. Y. Wu, Phys. Rev. B2 (1970), 723
 - 8) R. J. Baxter, Ann. Phys. 70 (1972), 323
 - 9) C. P. Yang, Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 586
B. Sutherland, C. P. Yang and C. N. Yang, Phys. Rev. Lett.
19 (1967), 588
 - 10) E. Barouch, in "Phase Transitions and Critical Phenomena"
(C. Domb and M. S. Green, eds) vol. I, pp 366-393
 - 11) K. Sogo, unpublished
 - 12) F. Y. Wu, Phys. Rev. B4 (1971), 2312
L. P. Kadanoff and F. J. Wegner, *ibid.*, 3989
 - 13) K. Sogo and Y. Akutsu, unpublished

- 14) 例 2.12 J. D. Weeks in "Ordering in Strongly Fluctuating Condensed Matter Systems" (T. Riste ed.), Plenum (1980) pp 293
- 15) H. van Beijeren, Phys. Rev. Lett. 38 (1977), 993
- 16) A.B. Zamolodchikov and V.A. Fateev, Sov. J. Nucl. Phys. 32 (1980), 293
- 17) F.Y. Wu, Solid Stat. Commun. 10 (1972), 115